ELEMENTY MATEMATYKI FINANSOWEJ

Wprowadzenie

Pieniądz ma określoną wartość, która ulega zmianie w zależności od czasu, w jakim zostaje on postawiony do naszej dyspozycji. Wartość tej samej nominalnie kwoty będzie inna dziś niż za miesiąc, rok, czy 10 lat. Zróżnicowanie realnej wartości pieniądza wiąże się, poza ewentualnym wpływem inflacji czy deflacji, z upływem czasu, a dokładniej mówiąc, ze zróżnicowaniem płynności pieniądza, którym będziemy dysponowali w przyszłości. Największy stopień płynności, a więc największą wartość, ma pieniądz będący aktualnie w naszej dyspozycji. Możemy nim dowolnie rozporządzać, przeznaczając go na konsumpcję, na zakup akcji lub obligacji, na działalność gospodarczą lub lokując go w banku.
Podstawowe przyczyny dla których
złotówka dziś ma większą wartość, niż złotówka za rok:

1. Alternatywny koszt kapitału - gdybyśmy otrzymali złotówkę już teraz, to przez rok moglibyśmy nią obracać, powiększając ten kapitał.
2. Niepewność - w ciągu roku może zajść wiele okoliczności, z powodu których złotówki nie otrzymamy (np. bankructwo osoby, która ma nam tę złotówkę zapłacić).
3. Inflacja

Zamrożenie pieniądza, np. w postaci inwestycji, lokaty bankowej lub udzielenia kredytu powoduje, że pozbawiamy się w danej chwili płynności Lokując pieniądze w bankach stajemy się ich wierzycielami i z tego tytułu otrzymujemy zyski w postaci odsetek. Przy każdym podejmowaniu alokacji środków będących w dyspozycji np. banku zachodzi konieczność określenia ich wielkości w różnym czasie. Związane jest to z wyznaczeniem bieżącej i przyszłej wartości pieniądza, co jest wynikiem operacji nazywanych odpowiednio **oprocentowaniem** i **dyskontowaniem**.

Oprocentowanie

W warunkach gospodarki rynkowej poziom stóp procentowych zależny jest przede wszystkim od podaży kapitału pożyczkowego i popytu na ten kapitał. Można zatem powiedzieć że rynkowa stopa procentowa jest ceną równowagi kapitału pożyczkowego.
W instytucjach bankowych podstawową stopę procentową, mającą zastosowanie dla depozytów i kredytów, wyznacza się w skali jednego roku. W przypadku gdy odsetki kapitalizowane są częściej niż raz do roku, nominalną roczną stopę procentową p należy dostosować do okresu kapitalizacji, czyli wyznaczyć zmodyfikowaną stopę procentową dla danego okresu.

Zmodyfikowana stopa procentowa

Gdy kapitalizacja dokonywana jest *m* razy w roku zmodyfikowana stopa procentowa wynosi:

$$\frac{p}{m}$$

np. kapitalizacja miesięczna: $\frac{p}{12}$

kapitalizacja kwartalna: $\frac{p}{4}$

Efektywna stopa procentowa

Warunki oprocentowania lokat bankowych określane są przez dwa parametry- nominalną stopę procentową i częstość kapitalizacji odsetek w ciągu roku. Największy przyrost kapitału osiągamy przy kapitalizacji ciągłej, a najmniejszy przy kapitalizacji rocznej. Czy kapitał powinien być lokowany w banku, który proponuje najwyższą tzw. efektywną stopę procentową, czy korzystając z kredytu należy postępować przeciwnie - korzystniejszy będzie wybór banku oferującego najniższą efektywną stopę procentową? Na pewno tak, jednak jeśli chodzi o przyszłą wartość pieniądza znacznie większe znaczenie ma wielkość oprocentowania, częstość kapitalizacji jest drugorzędna.

Efektywną stopę procentową można obliczyć ze wzoru:

(1) $$h = \left(1 + \frac{p}{m}\right)^m - 1$$

p - *roczna stopa procentowa*
m – *częstość kapitalizacji odsetek w ciągu roku*

Przykład.: W banku A nominalna stopa procentowa wynosi 24%, w banku B wynosi 25%. Bank A kapitalizuje odsetki co miesiąc, bank B co pół roku. Oblicz efektywną stopę procentową dla banku A i dla banku B.

Bank A: $r = 2\% \Rightarrow h = (1.02)^{12} - 1 = 0{,}2682 \approx 26{,}8\%$

Bank B: : $r = 12{,}5\% \Rightarrow h = (1.125)^2 - 1 = 0{,}2656 \approx 26{,}6\%$

Procent prosty

Procent prosty, to sposób oprocentowania kapitału (wkładu pieniężnego) polegający na tym, że dochód od złożonego wkładu w postaci odsetek nie jest doliczany do kapitału na następny okres, czyli nie bierze udziału w oprocentowaniu w następnym okresie.

Wartość przyszłą (future value) kapitału oraz kwotę odsetek po n okresach można obliczyć ze wzorów:

(2) $$K_n = K_0(1 + np)$$

(3) $$Z = K_0 np$$

n – *liczba okresów,* $n \in N$
K_n - *wartość kapitału po n okresach*
K_0 – *wartość kapitału wyjściowego*
p – *stopa procentowa*
Z – *kwota odsetek po n okresach*

Przykład. Wpłacamy do banku 10000 zł na dwa lata. Roczna stopa procentowa w banku wynosi 4%. Oblicz kwotę odsetek i kapitał po upływie dwóch lat zakładając, że oprocentowanie jest proste.

$$K_2 = 10000(1 + 2 \cdot 0{,}04) = 10800$$

$$Z = K_n - K_0 = 800$$

Kapitał po dwóch latach będzie miał wartość 10800 zł, a odsetki 800 zł.

Procent składany

Procent składany, to sposób oprocentowania wkładu pieniężnego polegający na tym, że dochód w postaci odsetek jest doliczany do wkładu i procentuje wraz z nim w okresie następnym.

Przyszłą wartość kapitału oraz kwotę odsetek można obliczyć ze wzorów:

(4) $$K_n = K_0(1+p)^n$$

(5) $$Z_n = K_0(1+p)^{n-1}p$$

$n -$ *liczba okresów,* $n \in N$

K_n *-wartość kapitału po n okresach*

$K_0 -$ *wartość kapitału wyjściowego*

$p -$ *stopa procentowa*

$Z_n -$ *kwota odsetek za n– ty okres*

Suma wszystkich odsetek (tzw. odsetki skumulowane):

(6) $$Z = K_n - K_0 = K_0\left[(1+p)^n - 1\right]$$

W przypadku gdy kapitalizacja odsetek dokonywana jest ***m*** razy w roku wartość kapitału na koniec *n*- tego roku wyznaczamy ze wzoru:

(7) $$K_n^m = K_0(1+r)^{nm}$$

$K_0 -$ *wartość kapitału wyjściowego*

$r = \frac{p}{m}$ - *zmodyfikowana stopa procentowa*

Przykład. Roczna stopa procentowa wynosi 5%, a kapitał początkowy 1000 zł. Jaka będzie wartość kapitału po czterech latach, jeśli odsetki kapitalizowane są: a) kwartalnie, b) miesięcznie,
c) rocznie?

a) $K_4^4 = 10000\left(1 + \frac{0{,}05}{4}\right)^{16} = 12198{,}9$

b) $K_4^{12} = 10000\left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^{48} = 12208{,}95$

c) $K_4 = 10000(1 + 0{,}05)^4 = 12155{,}06$

Przykład. Interesuje nas wartość, jaką po upływie 18 miesięcy będzie mieć kwota 150 zł, wpłaconych do banku na lokatę 3-miesięczną, o stałym oprocentowaniu 14% rocznie, z kapitalizacją odsetek co 3 miesiące.

$K_0 =$ 150 zł

$r = \frac{0,14}{4}$

m = 12 / 3 = 4 (liczba kapitalizacji w ciągu roku)

$n \cdot m = 6$ - liczba wszystkich kapitalizacji

$$K_n^m = K_0(1+r)^{nm} = 150 \cdot \left(1 + \frac{0,14}{4}\right)^6 = 184,39 \text{ zł}$$

Różnica: 184,39 - 150 = 34,39 zł – o tyle właśnie wzrośnie wartość naszej lokaty w ciągu nadchodzących 18 miesięcy.

Strumienie płatności

Załóżmy, że dokonujemy systematycznych, jednakowych wpłat na konto bankowe w równych odstępach czasu (np. co miesiąc lub co kwartał zasilamy swą lokatę jakąś kwotą pieniędzy).

W przypadku, gdy mamy do czynienia ze strumieniem jednakowych płatności z góry (na początku okresu): $W_0 = W_1 = W_2 = ... W_{n-1} = W$ to suma wszystkich wpłat wynosi:

(8) $$K_n = W(1+r)\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$ *r- zmodyfikowana stopa procentowa*

W przypadku, gdy mamy do czynienia ze strumieniem jednakowych płatności z dołu (na koniec okresu): $W_1 = W_2 = ... W_{n-1} = W_n = W$ to suma wszystkich wpłat wynosi:

(9) $$\overline{K}_n = W\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Wyrażenie $\frac{(1+r)^n - 1}{r}$ nazywamy czynnikiem wartości przyszłej dla strumienia równych płatności.

Przykład. Niech roczna stopa procentowa wynosi 30%, a odsetki kapitalizowane są co kwartał. Jaka będzie wartość wkładów po 600 zł po 5 latach, przy wpłatach kwartalnych z góry?

$$K_{20} = 600(1+0,075)\frac{(1+0,075)^{20} - 1}{0,075} = 27931,5$$

Po pięciu latach zgromadzimy 27931,5 zł.

Spłata kredytu

Zaciągnięcie kredytu wiąże się ze spłatą pożyczonego kapitału i należnych odsetek. Załóżmy, że spłaty kredytu dokonywać będziemy równymi kwotami płatności obejmującymi część kapitału i należnych odsetek oraz że kredyt będzie spłacany z dołu w *n* ratach.

Wysokość rocznej raty płatnej przez dłużnika na koniec każdego roku można obliczyć ze wzoru:

(10) $$R = K_0 \frac{p(1+p)^n}{(1+p)^n - 1}$$

p - roczna stopa procentowa

K_0 –wartość początkowa kredytu (wysokość pożyczki)

n – ilość rat

Dyskonto

Ile warta jest dziś kwota, którą dostaniemy w przyszłości? Albo inaczej – ile musimy wpłacić do banku dziś, żeby w przyszłości uzyskać określoną kwotę? Dyskontowaniem nazywamy poszukiwanie bieżącej, zaktualizowanej wartości (present value) pieniądza, gdy znana jest jego przyszła wartość. Jest to operacja odwrotna do oprocentowania.

Dyskonto proste:

Zdyskontowaną (obecną) wartość kapitału można obliczyć elementarnie przekształcając wzór (2):

(12) $$K_0 = \frac{K_n}{(1+np)}$$

n – liczba okresów

K_n -wartość kapitału po n okresach

K_0 – wartość kapitału wyjściowego

p – stopa procentowa

Dyskonto składane

Zdyskontowaną (obecną) wartość kapitału po n okresach można obliczyć przekształcając wzór (4):

(13) $$K_0 = \frac{K_n}{(1+p)^n}$$

n – liczba okresów

K_n -wartość kapitału po n - okresach

K_0 – wartość kapitału wyjściowego

p – stopa procentowa

Jeśli odsetki kapitalizowane są m razy w ciągu roku to:

(14) $$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^{nm}}$$

r – zmodyfikowana stopa procentowa

Przykład. Ile należy wpłacić teraz, aby za trzy lata mieć na koncie kwotę 200 zł, zakładając roczne oprocentowanie 15%.?

$$K_0 = \frac{200}{(1+0{,}15)^3} = 131{,}5$$

Czyli aby za trzy lata mieć na koncie kwotę 200 zł, teraz należy wpłacić na to konto 131,5 zł.

Można to także zinterpretować inaczej: jeśli ktoś obiecuje nam, że za trzy lata zapłaci nam 200 zł, a obowiązująca stopa procentowa wynosi 15%, to owa płatność ma dla nas TERAZ wartość tylko 131,5 zł.

Zadania

Uwaga: w zadaniach od 3 do 23 przyjmujemy założenie, że kapitał podlega oprocentowaniu składanemu.

1. Załóżmy, że roczna stopa procentowa w banku wynosi 5%. Po iłu latach odsetki od kapitału wyjściowego 4000 zł wyniosą 1000 zł, jeśli oprocentowanie jest proste?

2. Roczna stopa procentowa w banku X wynosi 10%. Po ilu latach ulokowany kapitał początkowy potroi się, jeśli oprocentowanie nie ulegnie zmianie i jest:
   a) proste,
   b) składane?

3. Pan Jan zdeponował w banku 20000 zł Po 12 latach zgromadzony w banku kapitał, pan Jan podarował córce. Jaki duży posag otrzymała córka jeśli stopa procentowa w banku była zmienna i wynosiła w pierwszych czterech latach 18%, w następnych pięciu latach 15%, a przez ostatnie trzy lata była na poziomie 10%?

4. W banku X roczna stopa procentowa jest na poziomie:
   a) 30%,
   b) 60%,
   c) 35%.

   Wyznacz w każdym przypadku miesięczną, kwartalną i półroczną stopę procentową w tym banku.

5. Wyznacz roczną stopę procentową tak, aby miesięczna stopa procentowa była na poziomie:
   a) 3,0%,
   b) 6,5%,
   c) 0,5%?

6. Roczna stopa procentowa w bankach wynosi 36%. Czy przedsięwzięcie gospodarcze będzie opłacalne, jeśli inwestując w nie 40000 zł możemy po 3 miesiącach uzyskać 42000 zł?

7. Oblicz roczną stopę procentową, jeśli:
   a) kwartalna stopa procentowa jest na poziomie 4,5%,
   b) półroczna stopa procentowa jest na poziomie 6,5%?

8. Pan Jan pożyczył od kolegi 36000 zł na 28 dni. Jaka jest roczna stopa procentowa tej transakcji, jeśli Pan Jan oddał 38000 zł?

9. Pan Jan zaciągnął kredyt w wysokości 35000 zł na trzy miesiące. Kredyt trzeba zwrócić jednorazowo wraz z odsetkami. Jaką kwotę musi zwrócić przy rocznej stopie procentowej:
   a) 26%,
   b) 30%?

Przedsiębiorca chce zakupić towar o wartości 8000 zł. Kwotę tę można uregulować na dwa sposoby:
   a) można zapłacić natychmiast z rabatem 5%,
   b) można zapłacić po 4 tygodniach.

   W przypadku natychmiastowej zapłaty przedsiębiorca musiałby zaciągnąć kredyt oprocentowany 45% w stosunku rocznym. Czy przedsiębiorca zdecyduje się na kredyt?

10. Masz dwie możliwości zapłaty za towar:
    a) natychmiastowa zapłata z rabatem 4%,
    b) zapłata całej wartości za 3 tygodnie.

    Decydując się na pierwszą możliwość, musisz zaciągnąć kredyt. Jaka maksymalna stopa oprocentowania kredytu w stosunku rocznym będzie dla ciebie do przyjęcia?

11. Pan Jan zdeponował pewien kapitał na 6 lat. Przy jakiej rocznej stopie procentowej odsetki od złożonego kapitału będą dwukrotnie większe niż złożony kapitał?
12.
13. Pan Jan zdeponował kapitał 30000 zł w banku przy 10% stopie procentowej. Jakiej sumy może się spodziewać po 4 latach, jeśli bank kapitalizuje odsetki co miesiąc?

14. W banku X roczna stopa procentowa wynosi 14%, a odsetki dopisywane są co kwartał. Jakiej kwoty możemy się spodziewać, gdy ulokujemy w tym banku 5000 zł na 3,5 roku?

15. Banki A i B płacą odsetki w wysokości 7% rocznie. W którym banku korzystniej jest złożyć depozyt, jeśli kapitalizacja odsetek w tych bankach jest odpowiednio kwartalna i miesięczna?

16. Oprocentowanie roczne 3-letnich obligacji Skarbu Państwa wynosi 30%, a ich kapitalizacja jest kwartalna. Inwestor zakupił obligacje za kwotę 2000 zł. Jaką wartość będą miały te obligacje za 2 lata?
17.
18. Przedsiębiorca musi wpłacić 5000 zł do banku X lub Y, aby zabezpieczyć inwestycję, którą rozpocznie za 7 miesięcy. Który z banków wybierze właściciel firmy, jeśli:
    a) bank X - roczna stopa procentowa wynosi 25%, kapitalizacja odsetek miesięczna,
    b) bank Y - roczna stopa procentowa wynosi 26%, kapitalizacja odsetek kwartalna?

19. Wiemy, że Indianie sprzedali Manhattan w roku 1626 za 24 dolary. Jaką wartość miałaby ta kwota w roku 2000, gdyby Indianie ulokowali je w banku na 5% rocznie?

20. Złożony depozyt do banku X podlega comiesięcznej kapitalizacji przy rocznej stopie procentowej 46%. Jaka powinna być roczna stopa procentowa w banku Y, aby był on konkurencyjny w stosunku do banku X, jeśli kapitalizuje on odsetki co kwartał?

21. Przedsiębiorca przewiduje, że za 6 lat będzie zmuszony wymienić pewne maszyny produkcyjne na nowe za kwotę 1500 zł. Jaką część aktualnego zysku wynoszącego 1300

zł musi właściciel ulokować w obligacjach oprocentowanych w stosunku rocznym na 8%, aby zabezpieczyć przyszłą inwestycję?

22. Pożyczkę bankową w wysokości 20000 zł trzeba spłacić w 4 równych ratach na koniec roku. Jakiej wielkości jest pojedyncza rata, jeśli od niespłaconej kwoty bank pobiera 8% odsetek w skali roku?

23. Zaciągnięty kredyt w wysokości 15000 zł, przy rocznej stopie procentowej 74%, należy spłacić w pięciu równych ratach za 5 miesięcy. Jaką kwotę należy zapłacić na koniec każdego miesiąca?

24. Przedsiębiorca zdecydował się na lokowanie w banku kwoty 400 zł pod koniec każdego roku przez kolejnych 8 lat. Jaki kapitał zgromadzi przedsiębiorca w banku, jeśli oprocentowanie roczne w tym okresie będzie stałe i równe 12%?

Odpowiedzi do zadań:

1. Po 5 latach,
2. *a)* Po 20 latach, *b)* Po około 11 latach.
3. 103 806,67 zł.
4. *a)* Miesięczna - 0,025; kwartalna - 0,075; półroczna - 0,150;
   b) miesięczna - 0,050; kwartalna - 0,150; półroczna - 0,300;
   c) miesięczna - 0,029; kwartalna - 0,0875; półroczna - 0,175.
5. a) 36%, b) 78%, c) 6%
6. Nie, gdyż 42 000,00 zł < 43 709,08 zł.
7. *a)* 18%,
   b) 3%.
8. 72%.
9. *a)* 37 275,00 zł,
   b) 37 625,00 zł.
10. Tak.
11. 72,2%.
12. 20,1%.
13. 44 680,62 zł.
14. 8093,47 zł.
15. W banku B, gdyż bank A - 7,18%, a bank B - 7,23%.
16. 3566,96 zł.
17. Bank Y, gdyż bank X - 5776,35 zł, a bank Y - 5793,99 zł.
18. 2018408628$.
19. p > 47,78%.
20. 72,7%.
21. 6038,42 zł.
22. 3598,12 zł.
23. 7367,89 zł.